Problème de la semaine

Alexis Hamache-Gilon - Ferdinand - Maxime Luce
Le Max De Culture

Dernière mise à jour le 31 mars 2025

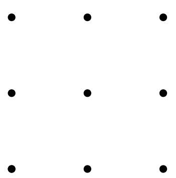
Introduction

1 problème par semaine. Diffusion de la vidéo de présentation le samedi (matin ?) et publication de la solution en vidéo le samedi suivant en non répertorié dans la description.

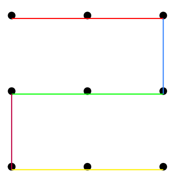
Semaine du 20 au 27 Février 2021 (proposé par Alexis)

Le problème

Est-il possible de relier ces 9 points (en 3×3) avec **quatre** segments consécutifs (à chaque changement de direction, on change de segment) ? Si oui, quelle configuration le permet ? Et avec 3 ?



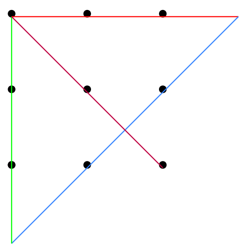
Le cas avec 5 segments est trivial. Par exemple, cette configuration le permet :



Indice : « pensez en dehors de la boîte »

Les solutions proposées

Après quelques recherche, on s'aperçoit rapidement qu'il est impossible de trouver une telle configuration en restant dans le carré. Pour le démontrer, il est possible de faire une disjonction de cas. Pour autant, il est bien possible de relier tous les points avec 4 segments consécutifs ! L'astuce est de « penser en dehors de la boîte » et, avec cette donnée, on peut trouver une solution pour 4 segments consécutifs est la suivante :



Bien sûr, il existe d'autres solutions par symétrie.

Si on cherche une telle configuration avec 3 segments consécutifs, on s'aperçoit vite que ce n'est pas possible. Le seul moyen d'y parvenir est de considérer des "points" très larges et, ainsi, on peut les relier avec 3 segments consécutifs en forme de "Z" mais on perd l'intérêt des points "sans largeur".

Semaine du 27 Février au 06 Mars 2021 (proposé par Ferdinand)

Le problème

Le Max de Culture organise une grande soirée où tous les 970 membres du serveur Discord sont invités ! Les membres du serveur étant très polis et courtois, ils décident de tous se saluer en se serrant la main. Combien de poignées de main seront en tout effectuées à cette soirée ?

Les solutions proposées

Disponible à partir du 05 Mars 2021.

1. Un raisonnement élémentaire

Considérons le cas général pour n membres. Chaque membre va serrer la main de tout le monde sauf lui même, c'est-à-dire de $(n-1)$ personnes. Le produit $n(n-1)$ nous donne alors le nombre cumulé de poignées de mains effectuées par tous les membres. Dans ce total, on a compté deux fois chaque poignée de mains ; si A sert la main de B, alors la poignée de main entre A et B est comptée une fois dans les $(n-1)$ poignées de main de A et une seconde fois dans les $(n-1)$ poignées de main de B. Pour avoir le nombre total de poignées de main individuelles effectuées à cette soirée, on divise alors le précédent résultat par 2. Le nombre total de poignées de main à cette soirée, pour n membres est donc :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Pour 970 membres, on trouve 469965 poignées de mains !

2. Tout le monde deux par deux ! - Un peu de combinatoire

On peut remarquer que le problème revient à se poser la question suivante : Combien de paires de deux personnes différentes peut-on faire avec un total de n membres, sans prendre en compte l'ordre des paires ? (i.e. A sert la main de B est équivalent à B sert la main de A).
Cela revient à calculer le nombre de combinaisons différentes de 2 membres parmi n membres :

,

$$
\begin{aligned}
n2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} &= \frac{1}{2} \times \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \cdots 3 \times 2 \times 1}{(n-2) \times (n-3) \cdots 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Pour 970 membres, on trouve 469965 poignées de mains !

3. Chacun son tour ! - Une somme d'entiers

Imaginons que la séance de poignée de main soit très organisée - il le faut bien étant donné le nombre de participants - et qu'elle se déroule de la manière suivante :
Chaque membre se voit numéroté d'un nombre. Le premier membre ouvre le bal et commence par serrer la main de tous les autres membres. Il fait alors $(n-1)$ poignées de main. Ensuite, le deuxième membre sert à son tour la main de chaque personne à qui il n'a pas encore serré la main, c'est-à-dire tout le monde sauf la personne qui est passée avant lui. Il sert alors la main de $(n-2)$ personnes. Ensuite vient le troisième membre qui, lui aussi, sert la main de toutes les personnes qu'il n'a pas encore salué, c'est-à-dire tout le monde sauf les personnes qui sont passées avant lui. Il effectue donc $(n-3)$ poignées de main. On peut généraliser et dire que le k^{ime} membre va serrer la main de tout le monde sauf des personnes qui sont passées avant lui. il va donc serrer la main de $(n-k)$ membres. On peut alors calculer le nombre total de poignées de main effectuées en sommant le nombre de poignée de main faites à chaque tour :

$$
\sum_{k=1}^{n}(n-k) = (n-1) + (n-2) + (n-3) \cdots 3 + 2 + 1
$$

Par symmétrie, on peut réécrire cette somme comme :

$$
\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = 1 + 2 + 3 \cdots (n-3) + (n-2) + (n-1)
$$

La légende raconte que, pour calculer efficacement une somme de ce type, le petit Gauss, alors qu'il n'était qu'enfant, a fait la démonstration suivante :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) &= (n-1) + (n-2) + (n-3) \quad \cdots \quad 3 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 \\
\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) &= \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad \cdots \quad (n-3) + (n-2) + (n-1) \\
\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) &= \quad n \quad + \quad n \quad + \quad n \quad \cdots \quad n \quad + \quad n \quad + \quad n
\end{aligned}
$$

On a ici la somme de (n-1) termes tous égaux à n, soit

$$
2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1)
$$

On trouve alors que le nombre total de poignées de main effectuées à la soirée est :

$$
\frac{n(n-1)}{2}
$$

Pour 970 membres, on trouve 469965 poignées de main !

Semaine du 06 au 13 Mars 2021 (proposé par Ferdinand)

Le problème

Les 970 membres du serveur discord "Le Max de Culture" décident de participer au jeu "Last man sitting" ! Le jeu se présente ainsi :

Chaque joueur est assis dans un siège numéroté de 1 à 970 et disposé en cercle dans le sens horaire. Un présentateur au doux nom de Christopher va tour à tour poser des questions aux membres et ce dans l'ordre croissant des sièges en commençant par le premier. Une fois arrivé au dernier siège, il continuera avec la personne assise à gauche du dernier membre interrogé et ainsi de suite. Si un membre répond mal à une question, il doit se lever et son siège est retiré du jeu. On continue jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule personne assise.
Seulement, Christopher, de par son manque d'humanité, ne sait pas poser de questions mesurées : soit elles sont trop dures et personne ne sait y répondre, soit elles sont trop faciles et tout le monde y répond correctement. Or, on sait aussi que Christopher, prévisible comme il est, commence par poser une question facile puis alterne entre question difficile et facile. Autrement dit, Christopher élimine un siège sur deux en tournant autour du cercle.

Dans quel siège faut-il se placer pour gagner la partie si tous les 970 membres du serveur jouent au jeu ?

Les solutions proposées

Disponible à partir du 12 Mars 2021.

Semaine du 13 au 20 Mars 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 19 Mars 2021.

Semaine du 20 au 27 Mars 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 26 Mars 2021.

Semaine du 27 Mars au 03 Avril 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 02 Avril 2021.

Semaine du 03 au 10 Avril 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 09 Avril 2021.

Semaine du 10 au 17 Avril 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 16 Avril 2021.

Semaine du 17 au 24 Avril 2021 (proposé par)

Le problème

Les solutions proposées

Disponible à partir du 23 Avril 2021.