Problème du jour

Le Max De Culture

Août 2020

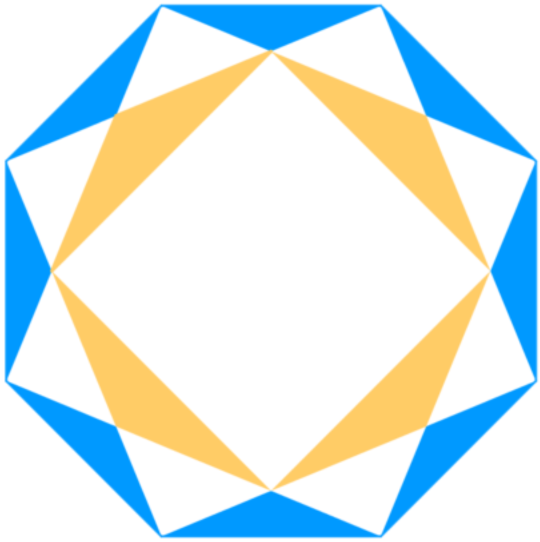
Document regroupant les problèmes du jour pendant le mois d'août 2020.

Table des matières

1 Problème du 08/08/2020

Le problème – Somme d'aires

La figure ci-dessous est composée d'octogones réguliers et de carrés.



La somme des aires des triangles oranges est-elle plus grande que celle des triangles bleus ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

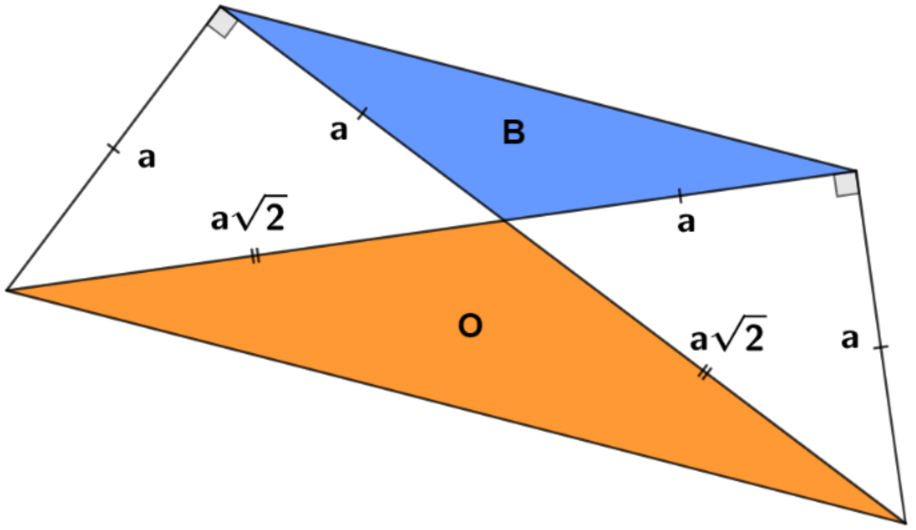
Première solution

Soit O l'aire d'un triangle orange, B l'aire d'un triangle bleu, et a la longueur des côtés égaux des triangles bleus.

Les quadrilatères formant les autres triangles étant des carrés, le triangle que l'on représenté blanc est rectangle.

On peut donc calculer les longueurs des côtés égaux du triangle orange en utilisant le théorème de Pythagore.

On arrive alors à cette configuration :



Les deux triangles étant opposés par le sommet et tous les deux isocèles, ils sont semblables. On a donc un rapport d'aire entre les deux qui est égal au rapport de leurs longueurs au carré.

On a donc :

$$B = \frac{a^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} \times O$$
$$B = \frac{1}{2} \times O$$

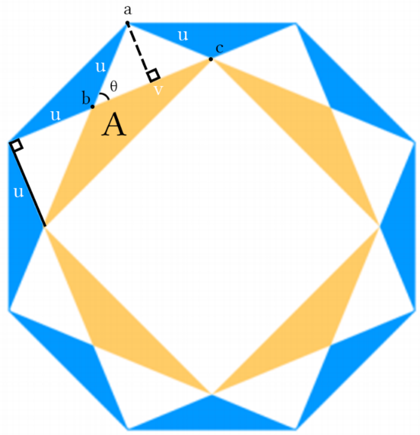
L'aire d'un triangle bleu est donc deux fois plus petite que l'aire d'un triangle orange. Or comme il y a deux fois plus de triangles bleus, **alors les sommes des aires sont égales**.

Cette solution a été trouvée par Alexis. Un grand merci à lui !

Deuxième solution

Par symétrie, on remarque que les triangles bleus sont des triangles isocèles de côté u et que les triangles jaunes sont des triangles isocèles de côté v.

On peut commencer par exprimer l'aire A d'un triangle jaune à l'aide des constructions suivantes :



A peut s'exprimer comme la moitié du produit de v par la hauteur du triangle passant par l'un des deux sommets en lesquels il n'est pas isocèle. La construction met en évidence que cette hauteur est égale à u.

De plus, v peut s'exprimer comme la somme du projeté orthogonal de ab sur bc et du projeté orthogonal de ac sur bc (en valeur absolue), comme le montre la construction.

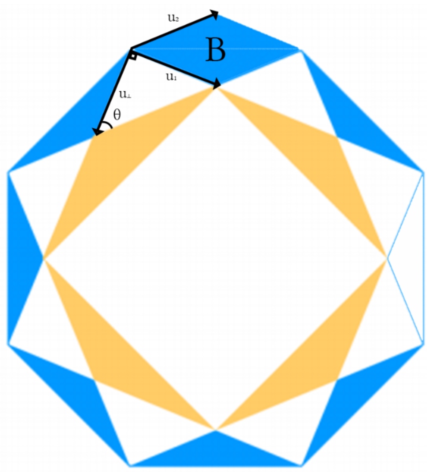
Le triangle abc étant lui même isocèle, $ab = ac = u$. On a donc $v = 2u\cos(\theta)$. On peut donc écrire :

$$A = \frac{1}{2}uv = u^2\cos(\theta)$$

On peut géométriquement faire apparaître un parallélogramme en assemblant deux triangles bleus (voir ci-contre). On pose les vecteurs u_1 et u_2 comme montré sur la figure ci-dessous. L'aire du parallélogramme B est donc donnée par :

$$B = ||u_1 \wedge u_2|| = |u_2 \cdot u_\perp|$$

avec $u_\perp = R\left(-\frac{\pi}{2}\right)u_1$.



$|u_2 \cdot u_\perp|$ est donné par le produit de la norme de u_2 avec la valeur absolue du projeté orthogonal de $u_\perp$ sur u_2. Les normes de u_2 et $u_\perp$ sont égales à u, et le projeté orthogonal de $u_\perp$ sur u_2 est égal à $\pm u \cos(\theta)$. Par conséquent,

$$B = u^2 \cos(\theta) = A$$

Puisqu'il y a deux fois plus de triangles bleus que de triangles jaunes, il y a autant de triangles jaunes que de parallélogrammes bleus. Or $A = B$, la somme des aires des triangles jaunes est donc égale à la somme des aires des triangles bleus.

Cette solution a été trouvée par Ferdinand. Un grand merci à lui !

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème grâce à Alexis sur Brilliant.org.

2 Problème du 09/08/2020

Le problème - Somme

2	8	8	6	4
8	2	4	2	12
4	4	2	6	16
6	8	4	12	2
8	6	4	2	4

Combien de nombres doit-on remplacer par zéro pour que la somme de chaque ligne et chaque colonne fasse 16 ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On remarque que la colonne du milieur nous contriant à supprimer un 2 et un 4 pour obtenir une somme de 16. On doit alors obligatoirement supprimer le 2 central. Pour obtenir 16 sur la ligne centrale, il faut alors conserver uniquement le 16, comme ce 16 est conservé, la dolonne de droite est inévitablement composée uniquement de ce 16 également. On arrive à cette situation :

2	8	8	6	4
8	2	4	2	12
4	4	2	6	16
6	8	4	12	2
8	6	4	2	4

On en déduit que nous n'avons pas le choix dans la dernière ligne que de supprimer le 4.

2	8	8	6	4
8	2	4	2	12
4	4	2	6	16
6	8	4	12	2
8	6	4	2	4

Devant conserver le 4 de l'avant dernière ligne, on ne peut conserver que le 12 de cette même ligne.

2	8	8	6	4
8	2	4	2	12
4	4	2	6	16
6	8	4	12	2
8	6	4	2	4

La ligne du haut est composée de deux 8 obligatoirement, ce qui fait déjà 16, on supprime les autres cases restantes, et cela nous mène à la situation finale, toutes les lignes valent 16 et toutes les colonnes aussi.

2	8	8	6	4
8	2	4	2	12
4	4	2	6	16
6	8	4	12	2
8	6	4	2	4

On a remplacé 12 nombres par des 0 et c'est la seule solution possible.

Cette solution a été trouvée par Alexis. Un grand merci à lui !

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème grâce à Alexis sur Brilliant.org.

3 Problème du 10/08/2020

Le problème - Tir à la carabine

Lors d'un entraînement au tir à la carbine, la cible (une canette d'Ice Tea Lipton) se trouve sur un mur à $2,5$m de hauteur. Entre le tireur et le mur se trouve un autre mur de 2m de haut, les deux murs étant distants de 3m.

À quelle distance minimale du deuxième mur doit se tenir le tireur pour viser et atteindre la cible ? L'arme et le viseur seront assimilés à un même point.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.

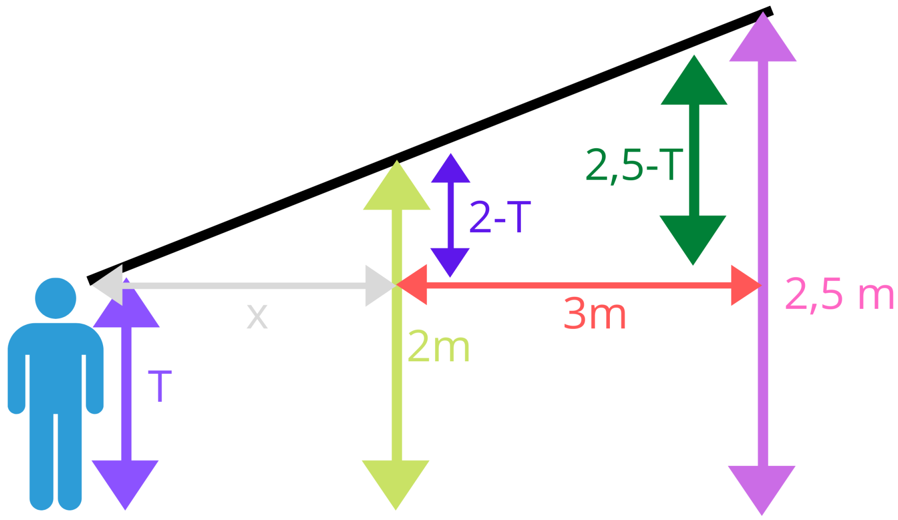
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

Soit T la taille du tireur et x la distance entre le tireur et le mur de 2 mètres devant lui.

On peut alors représenter la situation avec le schéma suivant :



Si $T > 2$, la distance minimale est 0, sinon :

On remarque une configuration de Thalès et on a alors :

$$\frac{2,5-T}{2-T} = \frac{3+x}{x}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & x(2,5-T) = (2-T)(3+x) \\ \iff & 2,5x - Tx = 6 - 3T + 2x - Tx \\ \iff & 2,5x - 2x = 6 - 3T \\ \iff & x = 12 - 6T \end{aligned}$$

Si $0 \leq T \leq 2$, $x = 12 - 6T$. La distance miniamle vaut donc $12 - 6t$.

Conclusion, si le tireur mesure plus de deux mètres, il peut être collé au mur, s'il mesure moins et que T est sa taille, il se place à une distance de $12 - 6T$ mètres du mur.

On pouvait traiter le cas où on négligeait la taille du tireur (donc $T = 0$), la méthode est la même et on trouve donc une distance minimale de 12 mètres ce qui vérifie bien $12 - 6 \times 0 = 12$.

Cette solution a été trouvée par Alexis et Fox. Un grand merci à eux !

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - 2de" de Nicolas Nguyen (ellipses).

4 Problème du 11/08/2020

Le problème - Un problème de transporteurs

Pour transporter des marchandises, un premier transporteur demande $400€$ au départ et $3,5€$ par kilomètre parcouru. Un second transporteur demande $1000€$ au départ et $2€$ par kilomètre parcouru.

Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note x ($x \geq 0$) la distance, en kilomètre, qu'un transporteur doit parcourir. On note f (et respectivement g) la fonction donnant le coût, en euro, du transport en fonction de x pour le premier (et respectivement le deuxième) transporteur. D'après l'énoncé, $f(x) = 400 + 3,5x$ et $g(x) = 1000 + 2x$. Répondre à la question posée revient à résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'inéquation $g(x) < f(x)$.

$$
\begin{aligned}
g(x) < f(x) &\iff 1000 + 2x < 400 + 3,5x \\
&\iff 1000 - 400 < 3,5x - 2x \\
&\iff 600 < 1,5x \\
&\iff \frac{600}{1,5} < x \\
g(x) < f(x) &\iff 400 < x
\end{aligned}
$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $S =]400; +\infty[$. Cela signifie que dès que la distance à parcourir est supérieure à 400 km, le deuxième transporteur est le plus avantageux.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - 2de" de Nicolas Nguyen (ellipses).

5 Problème du 12/08/2020

Le problème - Un problème de canots

Un canot automobile met cinq heures pour aller, par la Manche, de Calais à Douvres. En conservant la même vitesse propre, il met sept heures et trente minutes pour le trajet inverse.

Combien de temps un radeau se déplaçant à la vitesse du courant mettrait-il pour relier Calais à Douvres ?
Si la vitesse propre du canot augmenterait de $1,6$ km.h^{-1}, il mettrait 45 minutes de moins pour revenir de Douvres vers Calais. Calculer la vitesse propre du canot et celle du courant.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note D la distance en kilomètre sur la Manche entre Calais et Douvres ; V_{canot} et $V_{courant}$ sont les vitesses propres en kilomètre par heure, repectivement du canot et du courant. D'après l'énoncé, la vitesse du canot sur la Manche quand celui-ci est dans le sens du courant est $\dfrac{D}{5} = V_{canot} + V_{courant}$, d'autre part, la vitesse du canot sur le fleuve quand celui-ci est dans le sens contraire du courant est $\dfrac{D}{7,5} = V_{canot} - V_{courant}$, on obtient alors le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{D}{5} & = & V_{canot} + V_{courant} \\ \frac{D}{7,5} & = & V_{canot} - V_{courant} \end{cases}$$

Solution à la première question

La différence des deux lignes du système (S) donne les égalités :

$$\begin{aligned} \frac{D}{5} - \frac{D}{7,5} &= V_{canot} + V_{courant} - (V_{canot} - V_{courant}) \\ &= V_{canot} + V_{courant} - V_{canot} + V_{courant} \\ \frac{D}{5} - \frac{D}{7,5} &= 2V_{courant} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V_{courant} &= \frac{1}{2}\left(\frac{D}{5} - \frac{D}{7,5}\right) = \frac{D}{10} - \frac{D}{15} = \frac{15D}{150} - \frac{10D}{150} = \frac{5D}{150} \\ V_{courant} &= \frac{D}{30} \end{aligned}$$

Ainsi, si on note t_{radeau} le temps, en heure, nécessaire à un radeau se déplaçant à la vitesse du courant pour relier les deux ports, on a :

$$D = V_{courant} \times t_{radeau} \iff t_{radeau} = \frac{D}{V_{courant}}.$$

Remarque. Cela vient de la formule $v = \dfrac{d}{\Delta t}$

Finalement, on a :

$$t_{radeau} = \frac{D}{\frac{D}{30}} = D \times \frac{30}{D} = 30.$$

Le radeau mettra donc 30 heures pour relier les deux ports.

Solution à la deuxième question

Si la vitesse propre du canot augment de $1,6$ km.h^{-1}, alors il met 45 minutes de moins pour remonter le courant, par conséquent, la deuxième ligne du système devient :

$$\frac{D}{7,5-0,75} = V_{canot} + 1,6 - V_{courant} \iff \frac{D}{6,75} = V_{canot} - V_{courant} + 1,6$$

Or, d'après le système (S) :

$$V_{canot} - V_{courant} = \frac{D}{7,5}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{D}{6,75} = \frac{D}{7,5} + 1,6 \iff \frac{D}{6,75} - \frac{D}{7,5} = 1,6 \iff \frac{7,5D - 6,75D}{6,75 \times 7,5} = 1,6 \\ \iff \frac{0,75D}{50,625} = 1,6 \iff D = \frac{1,6 \times 50,625}{0,75} \\ \frac{D}{6,75} = \frac{D}{7,5} + 1,6 \iff D = 108 \end{aligned}$$

La distance sur la Manche entre Calais et Douvres est donc de 108 km. De ce fait, le système (S) devient :

$$(S) : \begin{cases} V_{canot} + V_{courant} & = \dfrac{108}{5} = 21,6 \\ V_{canot} - V_{courant} & = \dfrac{108}{7,5} = 14,4 \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre des deux lignes de (S), on a :

$$2V_{canot} = 36 \iff V_{canot} = 18.$$

En faisant la différence membre à membre des deux lignes de (S) ($l_1 - l_2$), on a :

$$2V_{courant} = 7,2 \iff V_{courant} = 3,6$$

On peut donc conclure que le canot et le courant ont pour vitesse respectives 18 km.h^{-1} et $3,6$ km.h^{-1}.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - 2de" de Nicolas Nguyen (ellipses).

6 Problème du 13/08/2020

Le problème - Un problème de rangement d'étagère

Sur une étagère, on compte 32 livres et bandes dessinées. Si on enlevait 5 livres et 3 bandes dessinées, il y aurait 2 fois plus de bandes dessinées que de livres.

Calculer le nombre de livres et le nombre de bandes dessinées sur l'étagère.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note x le nombre de livres et y le nombre de dandes dessinées. D'après " on compte 32 livres et bandes dessinées", on a :

$$x + y = 32$$

D'après "Si on enlevait 5 livres et 3 bandes dessinées, il y aurait 2 fois plus de bandes dessinées que de livres.", on a :

$$2(x-5) = y-3$$

Il s'agit donc ici de résoudre le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 32 \\ 2(x-5) & = & y-3 \end{array} \right.$$

On peut procéder par substitution :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 32 \\ 2(x-5) & = & y-3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 32-x \\ 2(x-5) & = & 32-x-3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 32-x \\ 2x-10 & = & 29-x \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 32-x \\ 3x & = & 39 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 32-13 \\ x & = & \frac{39}{3} = 13 \end{array} \right.$$

Remarque. Il était ici possible de faire une autre subtistution.

Il y a donc 13 livres et 19 bandes dessinées sur l'étagère.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

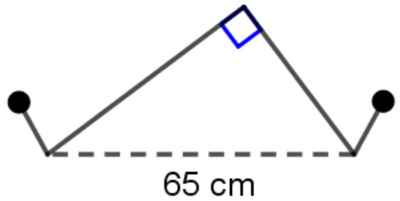
Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - 2de" de Nicolas Nguyen (ellipses).

7 Problème du 14/08/2020

Le problème – Un problème de clous

Les extrémités d'une ficelle sont fixées à deux clous distants de 65 cm. On forme avec cette ficelle un triangle comme l'indique la figure ci-dessous.



Peut-on former un triangle dans le cas où la longueur de la ficelle est 85 cm ? Si oui, indiquer les longueurs des côtés de l'angle droit de ce triangle.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note x et y les longueurs en centimètres des deux côtés de l'angle droit du triangle formé par la ficelle. On a alors :

$$x + y = 85 \qquad \text{(la somme des côtés vaut la longueur de la ficelle, 85 cm)}$$

et

$$x^2 + y^2 = 65^2 \qquad \text{(d'après le théorème de Pythagore)}$$

Ces deux équations impliquent que $y = 85 - x$ et, par conséquent, $x^2 + (85 - x)^2 = 65^2$.

x est donc la solution de l'équation $2x^2 - 170x + 7225 = 4225$ ou $x^2 - 85x + 1500 = 0$.

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 85x + 1500$. Le discriminant de P est donc $\Delta = 85^2 - 4 \times 1500 = 1225$. Puisque $\Delta > 0$, P possède deux racines :

$$x_1 = \frac{85 - \sqrt{1225}}{2} = 25 \text{ et } x_2 = \frac{85 + \sqrt{1225}}{2} = 60$$

Il est donc possible de former un triangle rectangle dans le cas où la longueur de la ficelle est 85 cm et ses longueurs des côtés de l'angle droit de ce triangle sont 25 cm et 60 cm.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - Première" de Nicolas Nguyen (ellipses).

8 Problème du 15/08/2020

Le problème - Un problème de cartes

Un magicien propose un tour de cartes à ses spectateurs.

Il dispose cent cartes sur une table, chaque carte a une face bleue et une face rouge. Initialement, toutes les cartes sont placées face rouge visible. Le magicien se bande complètement les yeux puis demande à un des spectateurs de dire à haute voix un nombre entre 1 et 100. Il demande alors à un autre spectateur de retourner autant de cartes que le nombre cité par le premier. Il annonce qu'il est en capacité de créer, à partir des cartes sur la table deux paquets avec le même nombre de faces bleues en l'air.

Comment fait-il ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

Appelons **N** le nombre choisi par le premier spectateur.
Sur la table nous avons N faces bleues et 100-N faces rouges.

Le magicien décide de prélever N cartes sur la table.
Soit **b** le nombre de faces bleues qu'il a prélevées parmi les N.
Sur la table il reste donc N-b faces bleues et il a dans sa main N-b faces rouges et b faces bleues.

En retournant intégralement le paquet qu'il a prélevé, il inverse ces données, il a donc b faces rouges et N-b faces bleues.
Il a donc autant de faces bleues (N-b) en main qu'il n'en reste sur la table (N-b), il vient de créer les deux paquets voulus.

Table	Main
100-N N	**0 0**

Le magicien prélève N cartes

100+2N-b N-b	**N-b b**

Le magicien retourne ce qu'il a en main
Les rouges deviennent bleues
Les bleues deviennent rouges

100+2N-b N-b	**b N-b**

On a N-b cartes bleues dans chaque paquet
Ce qu'on cherchait à faire.

Cette solution se généralise quel que soit le nombre de départ, on remarque que le résultat ne dépend pas de 100, on peut faire pareil avec autant de cartes que l'on souhaite.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

9 Problème du 16/08/2020

Le problème - Une tablette mésopotamienne du Louvre

La tablette mésopotamienne AO 8862 du Musée du Louvre a été achetée à Bagdad (Irak), en 1922 par l'archéologue français François Thureau-Dangin (1872-1944). Cette dernière en forme de prisme remonterait aux temps de la première dynastie babylonienne (2225-1595 av. J.-C.). Sur celle-ci, on peut lire le problème suivant :

"Un rectangle. J'ai multiplié la longueur par la largeur, j'ai ainsi construit une surface. Ensuite, j'ai ajouté à la surface ce par quoi la longueur dépasse la largeur ; j'ai obtenu 183. Enfin, j'ai ajouté la longueur à la largeur : j'ai obtenu 27. Que sont la longueur, la largeur et la surface ?".

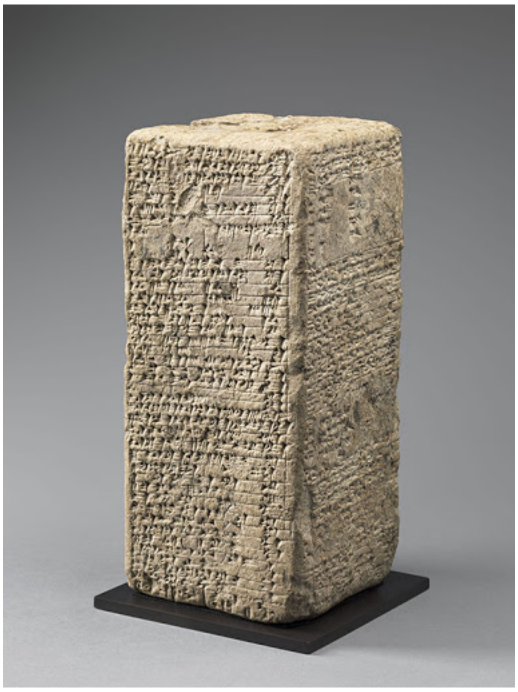


Figure 1 – AO 8862 du musée du Louvre
Source : (http ://ressources.louvrelens.fr/EXPLOITATION/oeuvre-ao-8862.aspx)

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note x la longueur et y la largeur avec, par conséquent, $x > y$. Alors la surface vaut xy. On peut représenter "*ce par quoi la longueur dépasse la largeur*" par $x - y$.

Pour obtenir 183, on ajoute $x - y$ à xy ce qui donne la première équation : $xy + (x - y) = 183$. La deuxième équation vient de "*Enfin, j'ai ajouté la longueur à la largeur : j'ai obtenu 27.*" qui peut se représenter par $x + y = 27$.

Il s'agit donc de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} xy + (x - y) &= 183 \\ x + y &= 27 \end{cases}$$

En utilisant la 2^e ligne du système, on peut exprimer y en fonction de x. $x + y = 27$ équivaut à $y = 27 - x$ que l'on va injecter dans la première ligne du système. Ainsi, $xy + (x - y) = 183$ devient $x(27 - x) + (x - (27 - x)) = 183$.

$$\begin{aligned} x(27 - x) + (x - (27 - x)) = 183 &\iff x(27 - x) + (x - 27 + x) = 183 \\ &\iff x(27 - x) + (2x - 27) = 183 \\ &\iff 27x - x^2 + 2x - 27 = 183 \\ &\iff -x^2 + 29x - 27 - 183 = 0 \\ &\iff -x^2 + 29x - 210 = 0 \end{aligned}$$

Ceci est une équation du second degré que l'on va résoudre. Dans cette dernière, $a = -1$; $b = 29$ et $c = -210$.Tout d'abord, calculons son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 29^2 - 4 \times (-1) \times (-210) = 841 - 840 = 1$

Ici, $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-29 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-30}{-2} = 15 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-29 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-28}{-2} = 14.$$

Maintenant que nous connaissons x, il faut déterminer les valeurs y associées. Pour cela, nous utilisons l'égalité suivant : $y = 27 - x$. Pour $x_1 = 15$, on obtient $y_1 = 27 - 15 = 12$ et pour $x_2 = 14$, $y_2 = 27 - 14 = 13$.

Vérifions les résultats trouvés pour $x_1 = 15$ et $y_1 = 12$:

$$\begin{cases} x_1y_1 + (x_1 - y_1) &= 15 \times 12 + (15 - 12) = 180 + 3 = 183 \\ x_1 + y_1 &= 15 + 12 = 27 \end{cases}$$

Et avec $x_2 = 14$ et $y_2 = 13$, on a bien :

$$\begin{cases} x_2y_2 + (x_2 - y_2) &= 14 \times 13 + (14 - 13) = 182 + 1 = 183 \\ x_2 + y_2 &= 14 + 13 = 27 \end{cases}$$

Remarque. Sur la tablette, à la suite, on peut voir une méthode de résolution proposée par les babyloniens. Cette tablette comme d'autres conservées dans plusieurs musées d'Europe témoignent que ce peuple (il y a plus de 4000 ans !) maîtrisait déjà bien l'algèbre et notamment la résolution des équations du second degré. Pas mal pour l'époque, n'est-ce pas ?

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Method's mathématiques Première S" dirigé par Xavier Merlin et écrit par Thomas Petit (ellipses).

10 Problème du 17/08/2020

Le problème - Une descente en rappel

Deux aventuriers sont en train d'explorer une grotte dans le but d'étudier la formation des stalagmites et stalagtites. Devant eux se trouve un grand trou semblable à un puit. Il n'y aucune autre issue possible. Pour déterminer la profondeur de ce trou, nos deux explorateurs (heureusement passionnés de mathématiques) y jetent un caillou. Ils entendent "toc", le bruit signifiant que le caillou est arrivé au fond, après 4 secondes.

Sachant que les deux aventuriers ont chacun une corde de 200 mètres, peuvent-ils descendre en rappel dans le trou ou est-il trop profond ?

Figure 2 – Une image de la grotte

Indication : La distance x parcourue en fonction du temps t (en s) est donnée par $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ qui est la loi de chute des corps de Galilée (et de Oresme) où $g \approx 9,81$m.s^{-1}, et la vitesse du son est de 340 m.s^{-1} dans l'air.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

Entre le moment où on lache le caillou et le moment où il touche le fond du trou, il s'est passé deux choses :

1) le caillou fait une chute jusqu'au fond du trou, cela dure t_1 secondes;
2) le "toc" remonte du fond du trou jusqu'à nos oreilles, cela dure t_2 secondes.

Le tout durant 4 secondes, on obtient l'équation : $t_1 + t_2 = 4$.

Or, si on appelle d la profondeur du trou, on a : $d = x(t_1) = \frac{1}{2}gt_1^2$ soit $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}}$.
De même, $d = 340 \times t_2$ $\left(\text{cela vient de } v = \frac{d}{\Delta t}\right)$ qui correspond au bruit qui remonte du trou, soit $t_2 = \frac{d}{340}$.
Ainsi, $\sqrt{\frac{2d}{g}} + \frac{d}{340} = 4$ qui est une équation d'inconnue d.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2d}{g}} + \frac{d}{340} = 4 &\iff \sqrt{\frac{d}{4,9}} + \frac{d}{340} = 4\\ &\iff \frac{1}{\sqrt{4,9}}\sqrt{d} + \frac{1}{340}\left(\sqrt{d}\right)^2 = 4\end{aligned}$$

(car $d > 0$ donc $\left(\sqrt{d}\right)^2 = d$).

Ceci est une équation du second degré d'inconnue $\sqrt{d}$ que l'on peut résoudre :

$$\frac{1}{340}\left(\sqrt{d}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{4,9}}\sqrt{d} - 4 = 0$$

Ici, $a = \frac{1}{340}$; $b = \frac{1}{\sqrt{4,9}}$ et $c = -4$. On calcule ensuite son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{\sqrt{4,9}}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{340} \times (-4) \approx 0,251140$
Puisque $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx -161,99 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 8,395385201$$

Or $\sqrt{d} > 0$ donc $d \approx 8,395385201^2 \approx 70,484$

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Method's mathématiques Première S" dirigé par Xavier Merlin et écrit par Thomas Petit (ellipses).

11 Problème du 18/08/2020

Le problème – Un problème de détergent

Un savon pour le lave-vaisselle se vend sous la forme de poudre ou de liquide. Un sondage sur les consommateurs donne les résultats suivants.

- Un tiers des personnes interrogées n'utilise pas la poudre.
- Deux septièmes des personnes interrogées n'utilisent pas le liquide.
- 427 personnes utilisent à la fois le liquide et la poudre.
- Un cinquième des personnes interrogées n'utilise pas du tout le produit.

Combien de consommateurs ont été interrogés au cours de ce sondage ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

Les données de l'énoncé mènent au tableau suivant :

	L	$\overline{L}$	total
P	$\frac{61}{105}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{3}$
$\overline{P}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
total	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

Soit N le nombre de consommateurs interrogés pendant le sondage.

$$\frac{61}{105} \times N = 427$$

Donc $N = \frac{427 \times 105}{61} = 735$, 735 personnes ont été interrogées pour réaliser ce sondage.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences" dirigé par Nicolas Nguyen (ellipses).

12 Problème du 19/08/2020

Le problème - Un peu de génétique

Les chromosomes sont des ensemble de gènes tous liés entre eux en une structure complexe.
Les gènes sont des morceaux de chromosome.
Les gamètes sont les cellules sexuelles spécialisées dans la fécondation.
Les allèles sont les différentes version d'un même gène.

Sur deux chromosomes différents, on considère deux gènes d'allèles respectifs A, a et B, b.
On peut avoir quatre types de gamètes qui ont la même probabilité d'apparaître : AB, Ab, aB, ab.
On s'intéresse à la transmission de ces deux caractères lors de la fécondation de deux parents. (exemple : AABB, AaBb, etc)

Montrer qu'il y a 9 cas possibles dont on déterminera la probabilité.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

	$A-B$	$A-b$	$a-B$	$a-b$
$A-B$	$\boxed{AA-BB}$	$\boxed{AA-Bb}$	$\boxed{Aa-BB}$	$\boxed{Aa-Bb}$
$A-b$	$AA-Bb$	$\boxed{AA-bb}$	$Aa-Bb$	$\boxed{Aa-bb}$
$a-B$	$Aa-BB$	$Aa-Bb$	$\boxed{aa-BB}$	$\boxed{aa-Bb}$
$a-b$	$Aa-Bb$	$Aa-bb$	$aa-bb$	$\boxed{aa-bb}$

On observe neuf cas possibles dont voici les probabilités :

	$AABB$	$AABb$	$AaBB$	$AaBb$	$AAbb$	$Aabb$	$aaBB$	$aaBb$	$aabb$
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

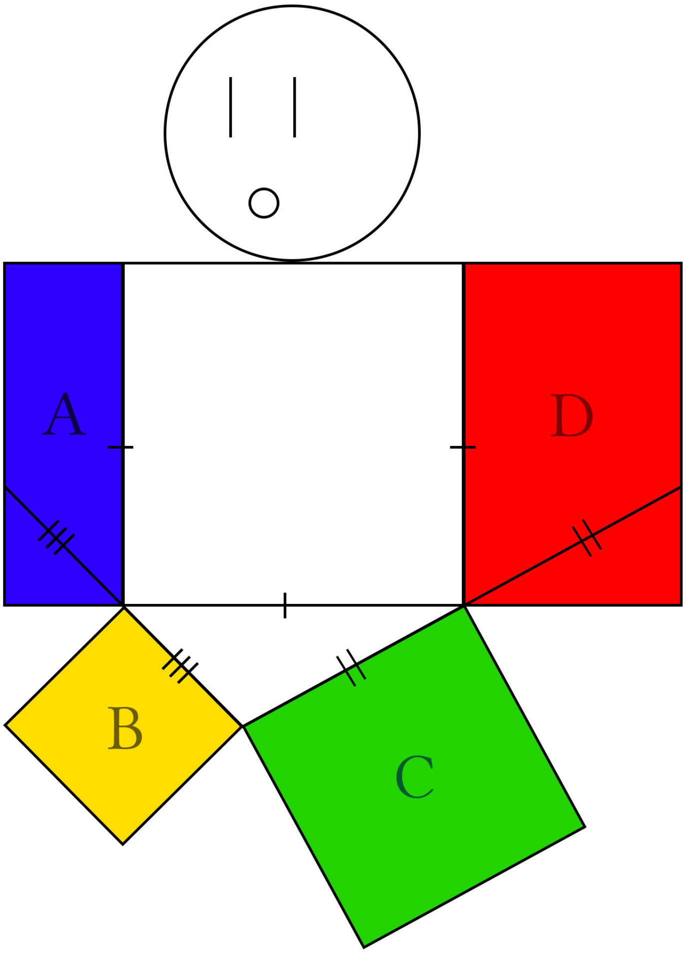
J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences" de Terminale dirigé par Nicolas Nguyen (ellipses).

13 Problème du 20/08/2020

Le problème - Un drôle de bonhomme !

Ce drôle de bonhomme a les bras et les jambes sens dessus dessous ! Aidez-le à y mettre un peu d'ordre en exprimant les aires de ses bras en fonction des aires de ses jambes.

On précise que les quadrilatères bleu et rouge sont des rectangles, les quadrilatères jaune et vert sont des carrés, le quadrilatère blanc est un carré et le triangle blanc est un triangle quelconque.

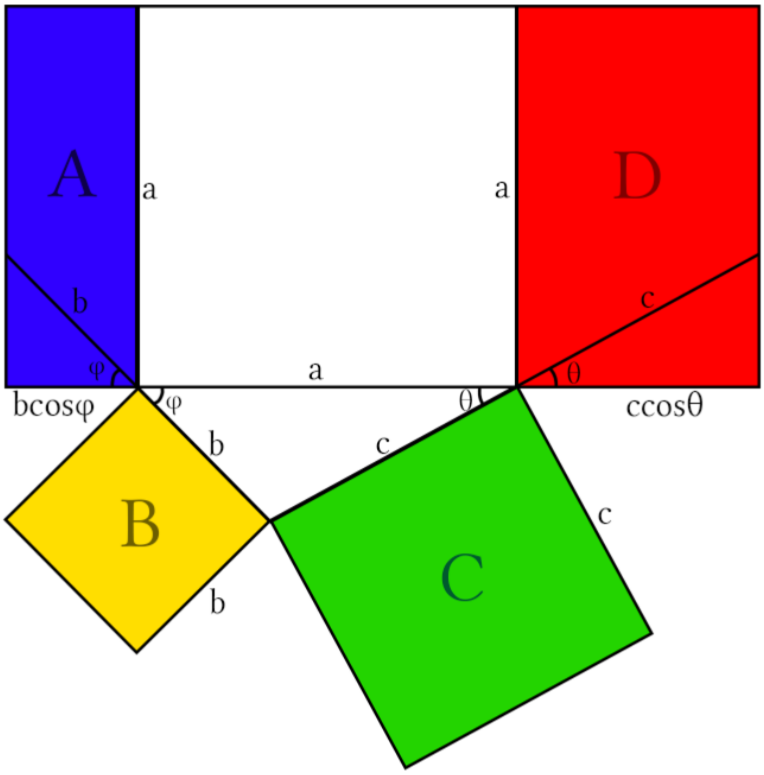


Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Solution 1 : Par le théorème d'Al-Kashi

On commence par nommer les côtés et les angles du triangle :



Par une simple considération trigonométrique, on peut exprimer les côtés inférieurs des rectangles bleu et rouge en fonction des angles du triangle, comme montré ci-dessus.

Une simple analyse de la figure permet d'exprimer les aires A, B, C et D en fonction des paramètres introduis :

$$\begin{aligned} A &= ab\cos(\varphi) \\ B &= b^2 \\ C &= c^2 \\ D &= ac\cos(\theta) \end{aligned}$$

Désormais, on peut appliquer le théorème d'Al-Kashi aux angles φ et θ :

$$\begin{aligned} 2ab\cos(\varphi) &= a^2 + b^2 - c^2 \\ 2ac\cos(\theta) &= a^2 + c^2 - b^2 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} 2A &= a^2 + B - C \\ 2D &= a^2 + C - B \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme a^2, on peut soustraire $2D$ à $2A$:

$$2A - 2D = 2B - 2C$$

$$A - D = B - C$$

On obtient donc que la différence entre les deux bras est égale à la différence entre les deux jambes.

Solution 1 - bis : Avec des produits scalaires

On peut aussi remarquer que le rectangle bleu (resp. rouge) peut s'exprimer comme le produit scalaire entre un vecteur de norme a que l'on appellera $\overrightarrow{u}$ et un vecteur de norme b (resp. c) que l'on appellera $\overrightarrow{v}$ faisant un angle de φ (resp. θ) entre eux. De même, on peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est de norme c (resp. b). Enfin, on peut voir que l'aire A (resp. B) est égale au produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{v}$:

$$
\begin{aligned}
ab\cos(\varphi) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \\
A &= \frac{1}{2}\left(a^2 + B - C\right)
\end{aligned}
$$

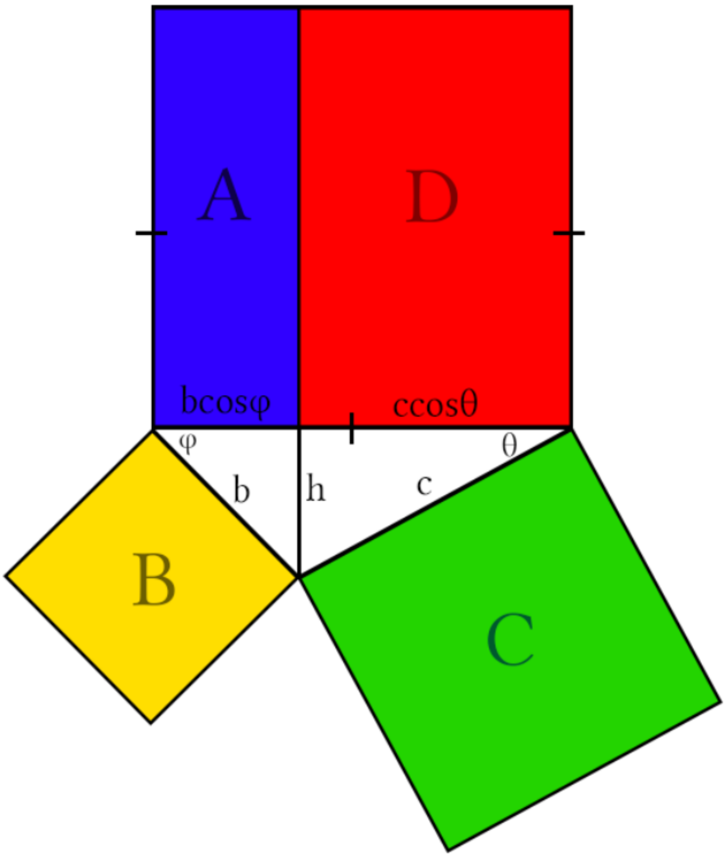
Resp. :

$$
\begin{aligned}
ac\cos(\theta) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right) \\
D &= \frac{1}{2}\left(a^2 + C - B\right)
\end{aligned}
$$

À partir de là, il suffit de suivre la démarche expliquée dans la solution 1 (à partir de l'élimination du terme en a^2).

Solution 2 : Un peu de réarrangement

On peut remarquer géométriquement que le rectangle bleu et le rectangle rouge peuvent être utilisés pour remplir le carré blanc de sorte que $A + D = a^2$ (en reprenant les notations de la méthode 1) :



Il suit que $a = b\,\text{cos}(\varphi) + c\,\text{cos}(\theta)$, on peut donc écrire A et D comme :

$$A = (b\,\text{cos}(\varphi) + c\,\text{cos}(\theta))\,b\,\text{cos}(\varphi)$$
$$D = (b\,\text{cos}(\varphi) + c\,\text{cos}(\theta))\,c\,\text{cos}(\theta)$$

On peut chercher à faire apparaître une identité remarquable en soustrayant D à A :

$$A - D = (b\,\text{cos}(\varphi) + c\,\text{cos}(\theta))\,(b\,\text{cos}(\varphi) - c\,\text{cos}(\theta))$$
$$A - D = b^2\,\text{cos}^2(\varphi) - c^2\,\text{cos}^2(\theta)$$

Il semble alors assez évident que le terme $b^2\,\text{cos}^2(\varphi) - c^2\,\text{cos}^2(\theta)$ est égal à $b^2 - c^2$. Pour s'en assurer, on peut appliquer le théorème de Pythagore aux triangles rectangles d'hypoténuses b et c ci-dessus :

$$b^2 = h^2 + b^2\,\text{cos}^2(\varphi)$$
$$c^2 = h^2 + c^2\,\text{cos}^2(\theta)$$
$$b^2 - c^2 = b^2\,\text{cos}^2(\varphi) - c^2\,\text{cos}^2(\theta)$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$A - D = b^2 - c^2$$

$$A - D = B - C$$

On obtient donc que la différence entre les deux bras est égale à la différence entre les deux jambes.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

14 Problème du 21/08/2020

Le problème - Les caractères ASCII

Un octet est constitué de 8 bits. Un bit vaut 0 ou 1. Sachant qu'un caractère ASCII est codé sur un octet dans lequel 1 bit est toujours à 0 (le bit de poids fort), combien de caractères ASCII existe-t-il ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Une solution

Il s'agit en fait de 7-listes (il y a toujours un bit faisant 0) dans un ensemble à 2 éléments (0 ou 1). Comme $2^7 = 128$, il existe 128 caractères ASCII.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences" de Terminale dirigé par Nicolas Nguyen (ellipses).

15 Problème du 22/08/2020

Le problème - Un peu de combinatoire

Définition

On définit la longueur d'un entier naturel comme le nombre suffisant de chiffres pour l'écrire.

Par exemple, 22 est de longueur 2, 000802 est de longueur 3 et 20050802 est de longueur 8.

Aide

1) Combien existe-t-il d'entiers naturels de longueur p ?

2) Combien existe-t-il d'entiers naturels de longueur p ne comportant pas de zéro ?

La question

En déduire que plus de 99% des nombres de longueur inférieure ou égale à 45 comportent 0 dans leur écriture.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solution

Aide

1) Le premier chiffre ne peut pas être nul ($\neq 0$), il y a donc 9 possibilités pour le premier chiffre.
Pour les $p-1$ chiffres suivants, il y a 10 possibilités pour chacun des chiffres donc 10^{p-1} en tout.
Au total, il y a $9 \times 10^{p-1}$ nombres de longueur p.

2) Puisque p ne contient pas de 0, il y a 9 possibilités pour chaque chiffre. Il y a donc au total 9^p nombres de longueur p sans 0 dans leur écriture.

La question

Les entiers de longueur inférieure ou égale à 45 sont les entiers de longueur 1, de longueur 2, de longueur 3, ..., de longueur 45.

Soit N le nombre d'entiers de longueur inférieur ou égale à 45.

D'après ce qui a été trouvé dans le 1),

$$N = 1 + 9 \times 10^0 + 9 \times 10^1 + ... + 9 \times 10^{44}$$

$$N = 1 + \sum_{k=0}^{44} 9 \times 10^k = 1 + \sum_{k=0}^{44} 9 \times \sum_{k=0}^{44} 10^k = 1 + 9 \times \frac{1 - 10^{45}}{1 - 10} = 1 + 10^{45} - 1 = 10^{45}$$

Soit $N_{\overline{0}}$ les entiers de longueur inférieure ou égale à 45 sans 0. D'après ce qui a été trouvé dans le 2),

$$N_{\overline{0}} = 9^0 + 9^1 + ... + 9^{45} = \sum_{k=0}^{45} 9^k = \frac{1 - 9^{46}}{1 - 9} = \frac{9^{46} - 1}{8}$$

Finalement, la proportion recherchée vaut :

$$\frac{N - N_{\overline{0}}}{N} \times 100 \approx 99,02\%$$

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences" de Terminale dirigé par Nicolas Nguyen (ellipses).

16 Problème du 23/08/2020

Le problème - Triplet pythagoricien

Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont trois entiers consécutifs, déterminer ces trois longueurs.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Une solution

Soit x la longueur du plus petit côté. Puisque l'on souhaite des entiers consécutifs, les deux autres sont $x+1$ et $x+2$ où $x+2$ est l'hypoténuse du triangle.

Le triangle étant rectangle, d'après Pythagore, on a :

$$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$$

Soit :

$$\begin{aligned} x^2+4x+4 &= x^2+2x+1+x^2 \\ 0 &= 2x^2-x^2+2x-4x+1-4 \\ 0 &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

Ceci est une équation du second degré que l'on peut résoudre :

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 4+12 = 16$

$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Or, on cherche une longueur donc x doit être positif donc x_1 ne convient pas. La solution qui convient est donc $x_2 = 3$.

En conclusion les longueurs des trois côtés sont $x=3$, $x+1=4$ et $x+2=5$. On peut vérifier que cela forme bien un triangle rectangle grâce à la réciproque du théorème de Pythagore : $\boxed{3^2+4^2=5^2}$.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

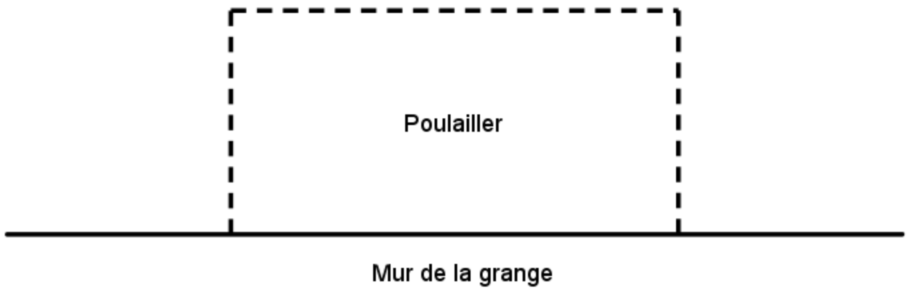
J'ai découvert ce problème dans le livre "Method's" de Première dirigé par Xavier Merlin (ellipses).

17 Problème du 24/08/2020

Le problème

Un fermier dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m et désire l'utiliser pour clôturer un poulailler rectangulaire attenant à sa grange comme schématiser ci dessous.

Quelles doivent être les dimensions du poulailler pour que la surface clôturée soit la plus grande possible ?



Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui. Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Une solution

Notons y la distance séparant les deux poteaux fixés au mur de la grange et x l'autre côté du poulailler rectangulaire. Toutes les mesures seront en mètres.

Puisque le grillage mesure 20 m, le périmètre du poulailler doit nécessairement être aussi égal à 20 m, soit $2x + y = 20$ et donc $y = 20 - 2x$.

Ainsi, l'aire du poulailler vaut : $\boxed{xy = x(20 - 2x)}$.

Notons f la fonction qui a x associe l'aire du poulailler (en mètre carré), $f : x \mapsto x(20-2x) = -2x^2 + 20x$.

Déterminons l'ensemble de définition de f qu'on notera D.

Soit $x \in D$, x étant une longueur $x \geq 0$ et y est aussi une longueur donc $y = 20 - 2x \geq 0$, ainsi $2x \leq 20$, donc $x \leq 10$. En conclusion, f est définie sur $D = [0; 10]$.

f est une fonction polynomiale de degré 2 telle que $f(0) = f(10) = 0$, donc f admet une unique écriture canonique de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a = -2$ et $\alpha = \frac{0+10}{2} = 5$, ainsi $\forall x \in D$, $f(x) = -2(x - 5)^2 + \beta$.

Or $\beta = f(\alpha)$ donc $\beta = f(5) = -2 \times 5^2 + 20 \times 5 = 50$. Finalement, $\forall x \in D$, $f(x) = -2(x - 5)^2 + 50$.

Grâce à la forme canonique, on en déduit les variations de f suivantes :

x	0		5		10
$f(x)$	0	$\nearrow$	50	$\searrow$	0

L'aire maximale du poulailler vaut donc 50m^2 obtenue avec $x = 5$ et $y = 20-2\times5 = 20-10 = 10$. En conclusion, les dimensions du poulailler sont 5m et 10m.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences" de Seconde dirigé par Nicolas Nguyen (ellipses).

18 Problème du 25/08/2020

Le problème - L'escargot

Un tapis extensible en caoutchouc mesure initialement 4m de long. Un escargot a décidé de le parcourir entièrement. Chaque journée, l'escargot progresse d'un mètre. Mais chaque nuit, pendant que l'escargot se repose, le tapis s'allonge de deux mètres qui se répartissent uniformément sur toute la longueur.

Au bout de combien de temps l'escargot parviendra-t-il au bout du tapis ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui. Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Une solution

On note L_n la longueur du tapis lors du n-ième jour et u_n l'éloignement de l'escargot de son point de départ à la fin de ce n-ième jour.

Commençons par étudier ce qui se passe lors des premiers jours :

- À la fin du 1^{er} jour : $L_1 = 4$ et $u_1 = 1$;
- À la fin du 2^e jour : $L_2 = 4 + 2 = 6$ et $u_2 = \dfrac{6}{4}u_1 + 1 = \dfrac{5}{2}$

  En effet, puisque le tapis s'allonge de façon uniforme, l'escargot s'éloigne de son point de départ d'un facteur $\dfrac{6}{4}$ sans avoir un bouger, et il progresse en plus de 1 m pendant le 2^e jour.
- À la fin du 3^e jour : $L_3 = 6 + 2 = 8$ et $u_3 = \dfrac{8}{6}u_2 + 1 = \dfrac{8}{6}\left(\dfrac{6}{4} + 1\right) + 1 = \dfrac{8}{4} + \dfrac{8}{6} + 1$.
- À la fin du 4^e jour : $L_4 = 8+2 = 10$ et $u_4 = \dfrac{10}{8}u_3 + 1 = \dfrac{10}{8}\left(\dfrac{8}{4} + \dfrac{8}{6} + 1\right) + 1 = \dfrac{10}{4} + \dfrac{10}{6} + \dfrac{10}{8} + 1$.

On va maintenant généraliser. À la fin du n-ième jour : $L_n = 2n + 2$ et

$$u_n = \frac{2n+2}{2n}\left(\frac{2n}{4} + \frac{2n}{6} + \ldots + \frac{2n}{2n-2} + 1\right) + 1$$

Donc

$$u_n = \frac{2n+2}{4} + \frac{2n+2}{6} + \ldots + \frac{2n+2}{2n-2} + \frac{2n+2}{2n} + 1$$

On sait que l'escargot parvient au bout du tapis si $u_n \geq L_n$ soit :

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) \geq 1$$

Le plus petit n vérifiant cette inégalité est 10 donc il faudra 10 jour pour que l'escargot parvienne au bout du tapis.

Solution algorithmique

Le problème revient à utiliser cet algorithme

```python
serie = 0
i = 2
while serie < 2:
  serie += 1/i
  i += 1

print(i-2) #Il y a un moins 1 lorsque l'on regarde la suite au dessus et il y a l'
```

On retrouve bien le 10.

Cette solution a été proposée par Math's. Un grand merci à lui !!

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "12 ans d'Olympiades académiques de mathématiques à l'usage des lycéens de Premières" de Nicolas Fardin (ellipses) et ce problème est tiré des Olympiades académiques de 2006.

19 Problème du 26/08/2020

Le problème - Les urnes

On dispose de 4 urnes numérotées 1,2,3 et 4. On répartit 100 boules dans ces 4 urnes de la manière suivante. 40 boules dans l'urne 1 ; 30 boules dans l'urne 2 ; 20 boules dans l'urne 3 et 10 boules dans l'urne 4.

Combien y-a-t-il de répartitions possibles ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui. Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

20 Problème du 27/08/2020

Le problème - Dé tétraédrique

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.
Le dé est posé sur une table, face "1" contre cette table.
Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.
À l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait ainsi la somme S de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le "1" initial.

Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour S. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui. Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

