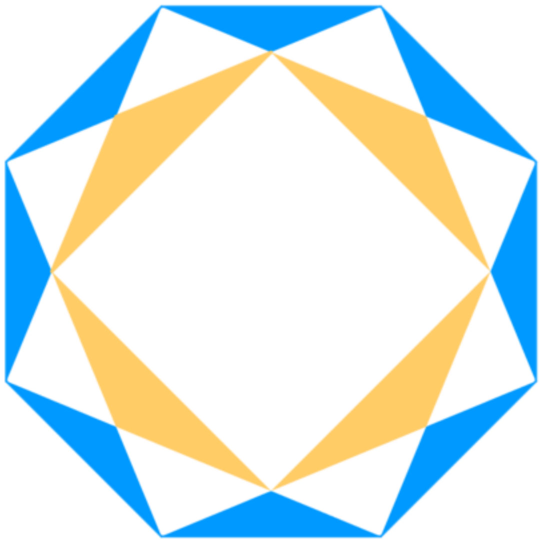
Problème du jour

Le Max De Culture

08/08/2020

Le problème - Somme d'aires

La figure ci-dessous est composée d'octogones réguliers et de carrés.



La somme des aires des triangles oranges est-elle plus grande que celle des triangles bleus ?

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.
Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

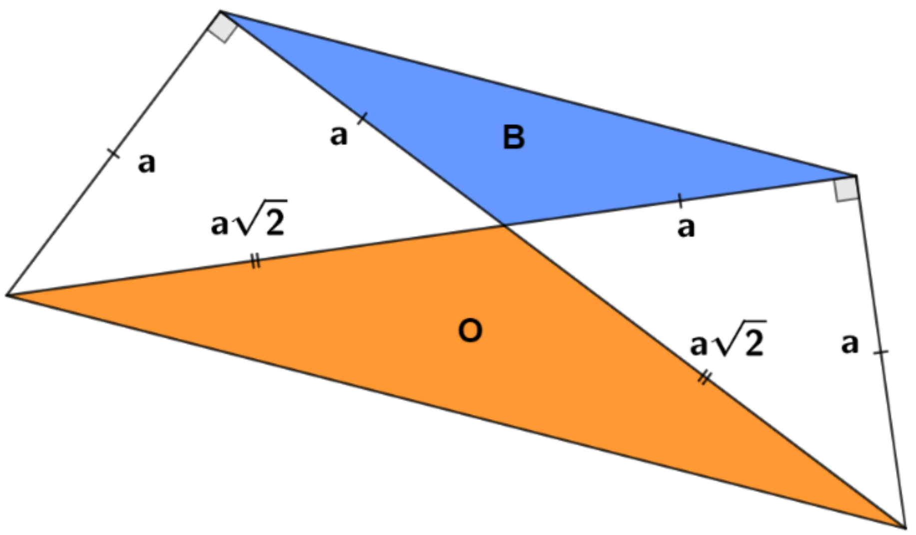
Première solution

Soit O l'aire d'un triangle orange, B l'aire d'un triangle bleu, et a la longueur des côtés égaux des triangles bleus.

Les quadrilatères formant les autres triangles étant des carrés, le triangle que l'on représenté blanc est rectangle.

On peut donc calculer les longueurs des côtés égaux du triangle orange en utilisant le théorème de Pythagore.

On arrive alors à cette configuration :



Les deux triangles étant opposés par le sommet et tous les deux isocèles, ils sont semblables. On a donc un rapport d'aire entre les deux qui est égal au rapport de leurs longueurs au carré.

On a donc :

$$B = \frac{a^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} \times O$$

$$B = \frac{1}{2} \times O$$

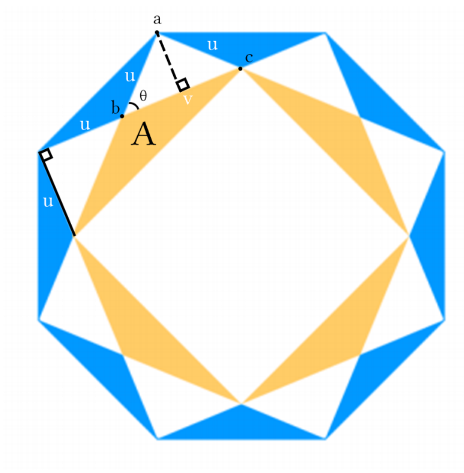
L'aire d'un triangle bleu est donc deux fois plus petite que l'aire d'un triangle orange. Or comme il y a deux fois plus de triangles bleus, **alors les sommes des aires sont égales**.

Cette solution a été trouvée par Alexis. Un grand merci à lui !

Deuxième solution

Par symétrie, on remarque que les triangles bleus sont des triangles isocèles de côté u et que les triangles jaunes sont des triangles isocèles de côté v.

On peut commencer par exprimer l'aire A d'un triangle jaune à l'aide des constructions suivantes :



A peut s'exprimer comme la moitié du produit de v par la hauteur du triangle passant par l'un des deux sommets en lesquels il n'est pas isocèle. La construction met en évidence que cette hauteur est égale à u.

De plus, v peut s'exprimer comme la somme du projeté orthogonal de ab sur bc et du projeté orthogonal de ac sur bc (en valeur absolue), comme le montre la construction.

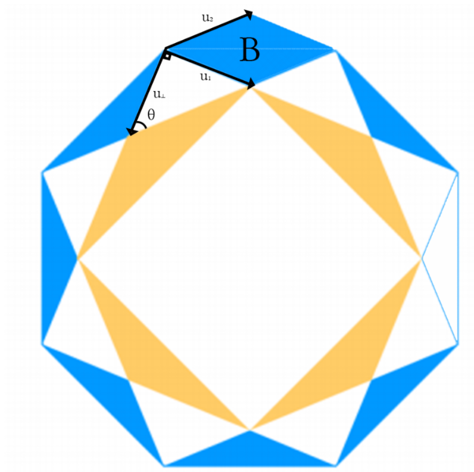
Le triangle abc étant lui même isocèle, $ab = ac = u$. On a donc $v = 2u\cos(\theta)$. On peut donc écrire :

$$A = \frac{1}{2}uv = u^2\cos(\theta)$$

On peut géométriquement faire apparaître un parallélogramme en assemblant deux triangles bleus (voir ci-contre). On pose les vecteurs u_1 et u_2 comme montré sur la figure ci-dessous. L'aire du parallélogramme B est donc donnée par :

$$B = ||u_1 \wedge u_2|| = |u_2 \cdot u_\perp|$$

avec $u_\perp = R\left(-\frac{\pi}{2}\right)u_1$.



$|u_2 \cdot u_\perp|$ est donné par le produit de la norme de u_2 avec la valeur absolue du projeté orthogonal de $u_\perp$ sur u_2. Les normes de u_2 et $u_\perp$ sont égales à u, et le projeté orthogonal de $u_\perp$ sur u_2 est égal à $\pm u \cos(\theta)$. Par conséquent,

$$B = u^2 \cos(\theta) = A$$

Puisqu'il y a deux fois plus de triangles bleus que de triangles jaunes, il y a autant de triangles jaunes que de parallélogrammes bleus. Or $A = B$, la somme des aires des triangles jaunes est donc égale à la somme des aires des triangles bleus.

Cette solution a été trouvée par Ferdinand. Un grand merci à lui !

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur https ://le-max-de-culture.fr/.

Sources

J'ai découvert ce problème grâce à Alexis sur Brilliant.org.

