Problème du jour

Le Max De Culture

27/08/2020

Le problème - Un problème de canots

Un canot automobile met cinq heures pour aller, par la Manche, de Calais à Douvres. En conservant la même vitesse propre, il met sept heures et trente minutes pour le trajet inverse.

Combien de temps un radeau se déplaçant à la vitesse du courant mettrait-il pour relier Calais à Douvres ?

Si la vitesse propre du canot augmentait de $1,6 \text{ km.h}^{-1}$, il mettrait 45 minutes de moins pour revenir de Douvres vers Calais. Calculer la vitesse propre du canot et celle du courant.

Voici un petit problème qui fera l'objet de notre petite étude d'aujourd'hui.

Cherchez bien la solution, n'hésitez pas à me communiquer sur Discord vos raisonnements (complets ou non) et nous étudierons différentes solutions ce soir.

Solutions

Première solution

On note D la distance en kilomètre sur la Manche entre Calais et Douvres ; V_{canot} et $V_{courant}$ sont les vitesses propres en kilomètre par heure, respectivement du canot et du courant. D'après l'énoncé, la vitesse du canot sur la Manche quand celui-ci est dans le sens du courant est $\frac{D}{5} = V_{canot} + V_{courant}$, d'autre part, la vitesse du canot sur le fleuve quand celui-ci est dans le sens contraire du courant est $\frac{D}{7,5} = V_{canot} - V_{courant}$, on obtient alors le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{D}{5} = V_{canot} + V_{courant} \\ \frac{D}{7,5} = V_{canot} - V_{courant} \end{cases}$$

Solution à la première question

La différence des deux lignes du système (S) donne les égalités :

$$\begin{aligned} \frac{D}{5} - \frac{D}{7,5} &= V_{canot} + V_{courant} - (V_{canot} - V_{courant}) \\ &= V_{canot} + V_{courant} - V_{canot} + V_{courant} \\ \frac{D}{5} - \frac{D}{7,5} &= 2V_{courant} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V_{courant} &= \frac{1}{2} \left(\frac{D}{5} - \frac{D}{7,5} \right) = \frac{D}{10} - \frac{D}{15} = \frac{15D}{150} - \frac{10D}{150} = \frac{5D}{150} \\ V_{courant} &= \frac{D}{30} \end{aligned}$$

Ainsi, si on note t_{radeau} le temps, en heure, nécessaire à un radeau se déplaçant à la vitesse du courant pour relier les deux ports, on a :

$$D = V_{courant} \times t_{radeau} \iff t_{radeau} = \frac{D}{V_{courant}}$$

Remarque. Cela vient de la formule $v = \frac{d}{\Delta t}$

Finalement, on a :

$$t_{radeau} = \frac{D}{\frac{D}{30}} = D \times \frac{30}{D} = 30.$$

Le radeau mettra donc 30 heures pour relier les deux ports.

Solution à la deuxième question

Si la vitesse propre du canot augment de $1,6 \text{ km.h}^{-1}$, alors il met 45 minutes de moins pour remonter le courant, par conséquent, la deuxième ligne du système devient :

$$\frac{D}{7,5 - 0,75} = V_{\text{canot}} + 1,6 - V_{\text{courant}} \iff \frac{D}{6,75} = V_{\text{canot}} - V_{\text{courant}} + 1,6$$

Or, d'après le système (S) :

$$V_{\text{canot}} - V_{\text{courant}} = \frac{D}{7,5}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{D}{6,75} &= \frac{D}{7,5} + 1,6 \iff \frac{D}{6,75} - \frac{D}{7,5} = 1,6 \iff \frac{7,5D - 6,75D}{6,75 \times 7,5} = 1,6 \\ &\iff \frac{0,75D}{50,625} = 1,6 \iff D = \frac{1,6 \times 50,625}{0,75} \\ \frac{D}{6,75} &= \frac{D}{7,5} + 1,6 \iff D = 108 \end{aligned}$$

La distance sur la Manche entre Calais et Douvres est donc de 108 km. De ce fait, le système (S) devient :

$$(S) : \begin{cases} V_{\text{canot}} + V_{\text{courant}} = \frac{108}{5} = 21,6 \\ V_{\text{canot}} - V_{\text{courant}} = \frac{108}{7,5} = 14,4 \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre des deux lignes de (S), on a :

$$2V_{\text{canot}} = 36 \iff V_{\text{canot}} = 18.$$

En faisant la différence membre à membre des deux lignes de (S) ($l_1 - l_2$), on a :

$$2V_{\text{courant}} = 7,2 \iff V_{\text{courant}} = 3,6$$

On peut donc conclure que le canot et le courant ont pour vitesse respectives 18 km.h^{-1} et $3,6 \text{ km.h}^{-1}$.

Autres solutions

Il existe d'autres solutions à ce problème. N'hésitez pas à communiquer vos démarches sur le serveur Discord ou par mail sur <https://le-max-de-culture.fr/>.

Sources

J'ai découvert ce problème dans le livre "Prépas Sciences - Maths - 2de" de Nicolas Nguyen (ellipses).